

Wahrscheinlichkeiten beim Schafkopf

Martin Scharrer
martin@scharrer-online.de

Revision 0.5
24. November 2013

1 Einleitung

1.1 Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Wahrscheinlichkeiten beim Schafkopf lassen sich mit Hilfe der Annahme berechnen das alle möglichen Kartenverteilungen gleich wahrscheinlich sind. Dies ist der Fall wenn die Karten vor jedem Spiel gründlich genug gemischt werden. In diesem Fall spricht man von einem sogenannten *Laplace-Experiment*. Hierbei gibt es immer eine gewisse endliche Anzahl von Möglichkeiten, hier Kartenverteilungen, von denen eine gewisse Anzahl als *günstig* bezeichnet werden, d.h. zum gewünschten Ausgang führen. Da alle Möglichkeiten gleich wahrscheinlich sind, muss man nur noch die Anzahl der günstigen durch die Gesamtanzahl teilen um die Wahrscheinlichkeit zu ermitteln.

Bei der Anzahl von möglichen Kartenverteilungen wird die Reihenfolge in der man die Karten bekommt ignoriert, da dies beim Schafkopf unwichtig ist (bis auf das Doppeln auf die ersten vier Karten). Hierbei kann der *Binomialkoeffizient* $\binom{n}{k}$ zur Hilfe genommen werden, der angibt auf wieviel Arten k Elemente (hier Karten) aus insgesamt n Stück "ausgewählt" werden können, wenn kein Element doppelt vorkommt und die Reihenfolge der Elemente unbeachtet bleibt. Genau dies ist beim Schafkopf der Fall, wobei das "auswählen" hier vom Zufall übernommen wird. Der Binomialkoeffizient ist wie folgt definiert: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ wobei $n!$ (n Fakultät) für $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ steht, also alle ganzen Zahlen von 1 bis n miteinander multipliziert. Zum Beispiel gibt es $\binom{6}{2} = 15$ mögliche Kombinationen von zwei beliebigen Karten aus sechs, z.B. zwei der insgesamt sechs Gras-Karten. Die weiteren sechs Karten die man bekommt stammen von den $32 - 6 = 26$ übrigen Karten. Hier gibt es $\binom{26}{6} = 230\,230$ mögliche Kombinationen. Da sich jede beliebige 2er Kombination mit jeder 6er Kombination kombiniert werden kann, müssen beide Anzahlen multipliziert werden. Es gibt also $\binom{6}{2} \cdot \binom{26}{6} = 15 \cdot 230\,230 = 3\,453\,450$ Möglichkeiten, dass genau zwei der acht Karten Gras sind. Insgesamt gibt es $\binom{32}{8} = 10\,518\,300$ mögliche Kartenverteilungen. Daraus folgt, dass die Wahrscheinlichkeit genau zwei Gras-Karten zu bekommen gleich $\frac{3\,453\,450}{10\,518\,300} = 0.3283 = 32,83\%$ ist. Diese Wahrscheinlichkeit

gilt natürlich auch für zwei Eichel- oder Schellen-Karten bzw. für zwei Karten aus sechs beliebig bestimmten Karten.

1.2 Begriffserklärung

Folgend werden die hier verwendeten Schafkopfbegriffe kurz erklärt, damit diese auch für den Anfänger eindeutig sind.

Der normale lange Schafkopf wird von vier Personen und mit 32 Karten gespielt von denen jeweils 8 Karten von den Farben Eichel, Gras, Schelle und Herz sind. Alle vier Ober und alle vier Unter sowie alle übrigen Herzkarten sind normalerweise Trümpfe. Deswegen werden nur Eichel, Gras und Schelle aus *Farben* bezeichnet. Bei einem Solo kann allerdings eine dieser Farben als Trumpf umdeklariert werden, was Herz dann eine normale Farbe werden läßt. Beim *Wenz* gelten nur die vier Unter (auch *Wenzen* genannt) als Trümpfe, Herz ist wiederum eine normale Farbe und die Ober liegen nun auf Grund ihres Punktwertes von 3 zwischen König (4) und 9er (0).

Von den vier Teilnehmern ist bei jedem nicht zusammengeworfenen Spiel einer der sogenannte *Spieler* der die Art des Spieles (Rufspiel, Farb-Solo, Wenz) ansagt. Sehr oft ist dies das Rufspiel bei dem er denjenigen der die Sau (Ass) einer gewissen Farbe besitzt als Partner bestimmt. Dieser Partner wird als *Mitspieler* bezeichnet. Beide zusammen können auch als *die Spieler* oder *die Spielpartei* bezeichnet werden. Die beiden anderen Teilnehmer heißen *Gegenspieler*, *Nichtspieler* oder *die Nichtspielerpartei*, wobei diese natürlich mitspielen und nicht etwa aussetzen auch wenn dies von den letzten zwei Namen angedeutet wird. Bei einem Farb-Solo oder Wenz gibt es nur den Spieler und drei Gegenspieler, aber keinen Mitspieler.

Derjenige der bei einem Stich als erster eine Karte ausspielen kann wird als der *Ausspieler* bezeichnet.

2 Trumpfverteilung

2.1 Sie

Die Wahrscheinlichkeit ein *Sie* zu bekommen, also alle Ober und Unter, ist einfach zu berechnen. Es gibt nur eine einzig günstige Kombination: $\binom{8}{8} = 1$, von den insgesamt $\binom{32}{8}$ möglichen:

$$P_{\text{Sie}} = \frac{1}{\binom{32}{8}} = \frac{1}{10\,518\,300} \quad (1)$$

Dies ist allerdings auch die Wahrscheinlichkeit für jede andere beliebige Kombination von acht Karten, z.B. alle 7er und 8er.

2.2 Wahrscheinlichkeit beim Ausgeben

Die Wahrscheinlichkeit eines bestimmte Anzahl Trümpfe t von den vorhandenen Trümpfen T ($= 14$ beim Sauspiel) zu bekommen läßt sich folgendermaßen herleiten. Es gibt $\binom{32}{8}$

Möglichkeiten acht Karten aus 32 zu bekommen. Unter diesen gibt es $\binom{T}{t}$ Möglichkeiten genau t Trümpfe zu bekommen, also z.B. $\binom{14}{2}$ Möglichkeiten für genau zwei Trümpfe bei einem Sauspiel mit 14 Trümpfen. Die restlichen $8 - t$ Karten der Hand stammen aus den übrigen $32 - T$ Karten: $\binom{32-T}{8-t}$, also $\binom{18}{6}$ für dieses Beispiel.

$$P_{\text{Trümpfe}}(T, t) = \frac{\binom{T}{t} \binom{32-T}{8-t}}{\binom{32}{8}} \quad (2)$$

Für ein normales Sauspiel mit $T = 14$ Trümpfen ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten in Tabelle 1.

Tabelle 1: Trumpfwahrscheinlichkeit beim Sauspiel

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P_{\text{Trümpfe}}(14, t)$ in %	0,42	4,24	16,06	29,65	29,12	15,53	4,37	0,59	0,03
Graph									

Interessant sind auch die Wahrscheinlichkeiten *mindestens* m Trümpfe zu bekommen, die sich aus der Summe von allen Wahrscheinlichkeiten $P(T, t')$ von $t' = t$ bis $t' = 8$ ergibt:

$$P_{\text{min. Trümpfe}}(T, t) = \sum_{t'=t}^8 \frac{\binom{T}{t'} \binom{32-T}{8-t'}}{\binom{32}{8}} \quad (3)$$

Tabelle 2: Wahrscheinlichkeit für mindestens t Trümpfe

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P_{\text{min. Tr.}}(14, t)$ in %	100	99,58	95,35	79,29	49,64	20,52	4,98	0,62	0,03
Graph									

Aus den Werten von Tabelle 2 ergibt sich, dass es sehr unwahrscheinlich ist total Trumpf-frei zu sein. Dies geschieht im Durchschnitt nur jedes 240te Spiel ($1/0.416$). In ca. 19 von 20 Spielen bekommt man zwei oder mehr Trümpfe und in etwa acht aus zehn Spielen drei oder mehr, in den Hälfte aller Spiele vier oder mehr.

2.3 Trumpfwahrscheinlichkeit der anderen Teilnehmer

Anhand der Anzahl der eigenen Trümpfe e lässt sich die Wahrscheinlichkeit für die Anzahl der Trümpfe für die anderen Teilnehmer der Schafkopfrunde berechnen. Dies ist ähnlich wie Gleichung 4, nur dass nur noch $T - e$ Trümpfe aus 24 Karten zur Verfügung stehen:

$$P_{\text{TAT}}(T, e, t) = \frac{\binom{T-e}{t} \binom{24-T+e}{8-t}}{\binom{24}{8}} \quad (4)$$

Tabelle 3: Trumpfwahrscheinlichkeit $P_{\text{TAT}}(14, e, t)$ für die anderen Teilnehmer wenn man e eigene Trümpfe besitzt.

$e \setminus t$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0,006 12	0,228	2,60	12,5	28,6	32,7	18,4	4,67	0,408
1	0,0224	0,583	4,90	18,0	32,1	28,9	12,8	2,57	0,175
2	0,0673	1,29	8,29	23,7	33,3	23,7	8,29	1,29	0,0673
3	0,175	2,57	12,8	28,9	32,1	18,0	4,90	0,583	0,0224
4	0,408	4,67	18,4	32,7	28,6	12,5	2,60	0,228	0,006 12
5	0,875	7,87	24,5	34,3	23,4	7,80	1,20	0,0734	0,001 22
6	1,75	12,4	30,5	33,3	17,3	4,26	0,457	0,0174	0,000 136
7	3,31	18,5	35,3	29,4	11,3	1,94	0,129	0,002 31	0
8	5,95	26,0	37,9	23,3	6,24	0,666	0,0208	0	0
*	0,416	4,24	16,1	29,7	29,1	15,5	4,37	0,587	0,0290

*) Zum Vergleich die Wahrscheinlichkeiten bei gleichverteilten Karten nach Tabelle 1.

Tabelle 4: Wahrscheinlichkeit für jeden der anderen Teilnehmer mindestens t Trümpfe zu haben wenn man e eigene Trümpfe besitzt.

$e \setminus t$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	100	99,99	99,77	97,17	84,70	56,11	23,45	5,07	0,41
1	100	99,98	99,39	94,49	76,53	44,45	15,57	2,74	0,17
2	100	99,93	98,64	90,35	66,66	33,34	9,65	1,36	0,07
3	100	99,83	97,26	84,43	55,55	23,47	5,51	0,61	0,02
4	100	99,59	94,93	76,55	43,89	15,30	2,83	0,23	0,01
5	100	99,13	91,25	66,75	32,45	9,07	1,27	0,07	0,00
6	100	98,25	85,81	55,32	22,06	4,74	0,47	0,02	0,00
7	100	96,69	78,18	42,85	13,40	2,07	0,13	0,00	0
8	100	94,05	68,09	30,23	6,93	0,69	0,02	0	0
*	100	99,58	95,35	79,29	49,64	20,52	4,98	0,62	0,03

*) Zum Vergleich die Wahrscheinlichkeiten bei gleichverteilten Karten nach Tabelle 2.

3 Wahrscheinlichkeit das die Rufsau beim Suchen gestochen wird

Beim Sauspiel ruft der Spieler seinen Mitspieler mittels einer Sau der drei Farben. Der Spieler muss mindestens eine Karte der Farbe besitzen. Ein ausspielender Gegenspieler kann die Rufsau nun suchen indem er eine Karte dieses Farbe ausspielt. Sein Mitspie-

ler darf keine Karte dieser Farbe besitzen um stechen zu dürfen. Desweiteren muss er natürlich einen Trumpf besitzen.

Die Stechwahrscheinlichkeit kann in Abhängigkeit der Anzahl der Karten der Ruffarbe die der Sucher besitzt angegeben. Diese Anzahl wird nun mit n angegeben, wobei gilt $n = 1 \dots 4$. Von den sechs Farbkarten liegt mindestens eine beim Spieler und eine (die Sau) beim Mitspieler. Von den übrigen $4 - n$ Karten darf sich keine beim zweiten Gegenspieler befinden.

3.1 Gleichverteilte Karten

Wird eine Gleichverteilung der verbleibenden Farbkarten angenommen, d.h. der Spieler hat mit der selben Wahrscheinlichkeit zusätzliche Karten der Ruffarbe als der Mitspieler und der zweite Gegenspieler, ergibt sich folgende Herleitung: Zwei Karten der Ruffarbe, darunter die Sau, sind bereits per Definition auf Spieler und Mitspieler vergeben. Von den 30 restlichen Karten sind bereits acht beim Ausspieler, davon n in der Ruffarbe und weitere $8 - n$ Karten. Von den restlichen 22 Karten sind noch weitere $4 - n$ Karten der Ruffarbe enthalten. Dies heißt nun, das $22 - (4 - n) = 18 + n$ Karten nicht von der Ruffarbe sind. Aus diesen müssen nun alle acht Karten des zweiten Gegenspielers kommen. Für dies gibt es $\binom{18+n}{8}$ mögliche Kartenverteilungen aus den ursprünglichen $\binom{22}{8}$.

$$P_{\text{RG}}(n) = \frac{\binom{18+n}{8}}{\binom{22}{8}} \quad (5)$$

Dies ergibt die folgenden Wahrscheinlichkeiten das die Rufsau gestochen wird:

$$P_{\text{RG}}(n = 1) = \frac{13}{55} = 23,64 \% \quad (6)$$

$$P_{\text{RG}}(n = 2) = \frac{13}{33} = 39,40 \% \quad (7)$$

$$P_{\text{RG}}(n = 3) = \frac{7}{11} = 63,64 \% \quad (8)$$

$$P_{\text{RG}}(n = 4) = 1 = 100 \% \quad (9)$$

Diese Wahrscheinlichkeiten müssen nun mit der Wahrscheinlichkeit das der zweite Gegenspieler mindestens einen Trumpf hat (99,58 %, s.o.) multipliziert werden.

$$P_{\text{RG}'}(n = 1) = 23,54 \% \quad (10)$$

$$P_{\text{RG}'}(n = 2) = 39,23 \% \quad (11)$$

$$P_{\text{RG}'}(n = 3) = 63,37 \% \quad (12)$$

$$P_{\text{RG}'}(n = 4) = 99,58 \% \quad (13)$$

3.2 Spieler hat nur wenige Karten in der Ruffarbe

Die obige Annahme alle Farbkarten sind gleich verteilt ist in Praxis nicht der Fall, da der Spieler normalerweise nur eine Farbe ruft von der er nicht mehr als eine Karte besitzt. Es kommt allerdings auch vor das der Spieler mit zwei Farbkarten ruft, wenn dies seine einzige Farbe ist. Es wird also nun angenommen, dass der Spieler nur s Karten in der Farbe besitzt und die Stechwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit davon berechnet, allerdings wiederum aus der Sicht des ausspielenden Gegenspielers der n Karten besitzt. Dieser kennt zwar den genauen Wert von s nicht, kann aber davon ausgehen das er klein, meist gleich 1 ist.

Die Stechwahrscheinlichkeit leitet sich wie folgt her: Es gibt 6 Karten der Ruffarbe und 26 weitere Karten. Eine Karte der Ruffarbe, die Sau, liegt per Definition beim Mitspieler. Der Spieler und suchende Gegenspieler sollen nun von den restlichen fünf Karten der Ruffarbe insgesamt genau $s + n$ Stück haben. Beide haben ebenfalls $2 \cdot 8 - s - n$ weitere Karten die nicht von der Ruffarbe sind. Dies reduziert die insgesamt noch unverteilt Karten von den ursprünglichen 32 auf $32 - 8 - 8 - 1 = 15$, wobei die Rufsau ebenfalls bereits abgezogen ist. Von diesen 15 bekommt der Mitspieler noch 7 und der zweite Gegenspieler noch 8 Karten. Insgesamt gibt es also $\binom{15}{7}$ Verteilungsmöglichkeiten für die Karten des Mitspielers. Um die Sau stechen zu können, müssen alle übrigen $6 - 1 - s - n$ Karten der Ruffarbe dem Mitspieler und keine dem zweiten Gegenspieler zufallen. Für dies gibt es nur eine einzige günstige Verteilung $\binom{5-s-n}{5-s-n} = 1$. Die weiteren $7 - (5 - s - n) = 2 + s + n$ Karten des Mitspielers ergeben $15 - (5 - s - n) = 10 + s + n$ mögliche Kartenverteilungen, also gibt es insgesamt $1 \cdot \binom{10+s+n}{2+s+n}$ günstige Verteilungen.

$$P(s, n) = \frac{\binom{10 + s + n}{2 + s + n}}{\binom{15}{7}} \quad (14)$$

Die resultierende Formel ist soweit logisch, dass die einzelne Kartenverteilung auf Spieler und suchenden Gegenspieler unwichtig ist, sondern nur die Summe beider Anzahlen, da sich dadurch die Anzahl der restlichen Karten der Ruffarbe ergibt.

Für den häufigen Fall von $s = 1$ ergeben sich nun die folgenden Wahrscheinlichkeiten die von den obigen deutlich abweichen. Dies Abweichung existiert da nun die meisten Farbkarten nur von einer Person gehalten werden müssen und sich nicht mehr frei auf zwei verteilen können.

$$\begin{aligned} P(s = 1, n = 1) &= \frac{1}{13} = 7,69 \% \\ P(s = 1, n = 2) &= \frac{1}{5} = 20,00 \% \\ P(s = 1, n = 3) &= \frac{7}{15} = 46,67 \% \\ P(s = 1, n = 4) &= 1 = 100 \% \end{aligned}$$

Dies bedeutet das bei nur einer Karte in der Ruffarbe die Rufsau nur jedes 13te Mal gestochen wird. Hat man zwei Karten ebenfalls nur jedes 5te Mal. Hat man drei Karten

liegt die Stechwahrscheinlichkeit immer noch bei etwas weniger als 50:50. Der kleinere Wert von 46,67 % ergibt sich aus der Tatsache das der Mitspieler nur 7 weitere Karten bekommt (da er die Rufsau bereits sicher besitzt), der zweite Gegenspieler aber 8 Karten. Es also ein klein wenig wahrscheinlicher ist, dass dieser die einzelne Karte in der Ruffarbe bekommt.

Für den weniger häufigen Fall $s = 2$ ergeben sich die selben Zahlenwerte, allerdings bereits für eine Karte des Ausspielers weniger. Allerdings weiß in diesem Fall der ausspielende Gegenspieler nichts von seinen besseren Chancen.

$$P(s = 2, n = 1) = \frac{1}{5} = 20,00 \%$$

$$P(s = 2, n = 2) = \frac{7}{15} = 46,67 \%$$

$$P(s = 2, n = 3) = 1 = 100 \%$$

Der Fall $s = 3$ wird wohl eher selten vorkommen, allerdings kann der Spieler auch in diesem Fall davon ausgehen, dass sein Team die Sau bei jedem zweiten Spiel behält.

$$P(s = 3, n = 1) = \frac{7}{15} = 46,67 \%$$

$$P(s = 3, n = 2) = 1 = 100 \%$$

Diese Ergebnisse müssen ebenfalls noch mit der Wahrscheinlichkeit das der Gegenspieler mindestens einen Trumpf hat multipliziert werden, erklären aber bereits jetzt viel besser die allgemeine Erfahrung, dass die Rufsau normalerweise durchgeht. Das ursprüngliche Ergebnis bei $n = 1$ ergab 23,64 % (bzw. 23,54 %), was ungefähr ein Spiel aus vieren entspricht. Das zweite Ergebnis von einen Spiel aus 13 ist deutlich realistischer. Nimmt man nun an dass in 90 % aller Fälle der Spieler eine Rufsau mit nur einer Karte dieser Farbe ruft ($s = 1$) und dies es nur extrem selten, z.B. 1 aus 1000 Mal, mit drei Karten ($s = 3$) tut, ergibt sich totale Wahrscheinlichkeit von $\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{13} + \frac{99}{1000} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{1000} \cdot \frac{7}{15} = 8,95 \%$. Rechnet man die Möglichkeit ein, dass der zweite Gegenspieler gar keinen Trumpf hat kommt man auf um die 8,50 %, also ungefähr ein Mal bei 11 Versuchen. Die allgemeine Vorgehensweise, dass die Gegenspieler trotzdem suchen wird u.A. dadurch erklärt das damit der Partner eindeutig bestimmt wird und die Rufsau aufgrund der üblicherweise niedrigeren Anzahl von Trümpfen ansonsten kaum direkt gestochen werden kann.

4 Wenz: Wahrscheinlichkeit das verbleibende Unter zusammenstehen

4.1 Spieler hat zwei Unter

Der Spieler hat zwei Unter und sechs weiter Karten. Ein Gegenspieler bekommt acht Karten von den übrigen 24, was $\binom{24}{8}$ mögliche Kartenverteilungen ergibt. Zwei Unter von zwei Unter zu bekommen ist nur mit einer einzigen Kartenverteilung möglich: $\binom{2}{2} = 1$, die allerdings mit den Kartenverteilungen der übrigen sechs Karten multipliziert wird:

$\binom{22}{6}$). Die resultierende Wahrscheinlichkeit wird verdreifacht, da es drei Gegenspieler gibt und immer nur einer die zwei Unter besitzen können, die Wahrscheinlichkeiten sich also nicht überlappen.

$$P(2) = 3 \cdot \frac{\binom{2}{2} \binom{22}{6}}{\binom{24}{8}} = \frac{7}{23} = 30,43\% \quad (15)$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 30,43% besitzt ein Gegenspieler bei verbleibende Unter.

4.2 Spieler hat einen Unter

In diesem Fall gibt es $\binom{3}{2}$ mögliche Kartenverteilungen zwei Unter aus drei zu bekommen, wieder multipliziert mit den Kartenverteilungen $\binom{21}{6}$ für die restlichen sechs Karten die aber nun nur aus 21 Karten bestehen

$$P(2) = 3 \cdot \frac{\binom{3}{2} \binom{21}{6}}{\binom{24}{8}} = \frac{168}{253} = 66,40\% \quad (16)$$

Für drei Unter gibt es nur eine Kartenverteilung $\binom{3}{3} = 1$, multipliziert mit den Kartenverteilungen der fünf anderen Karten aus den verbleibenden 21: $\binom{21}{5}$.

$$P(3) = 3 \cdot \frac{\binom{3}{3} \binom{21}{5}}{\binom{24}{8}} = \frac{21}{253} = 8,30\% \quad (17)$$

Die Wahrscheinlichkeit das alle drei Unter auseinanderstehen läßt sich einerseits durch die beiden obigen Wahrscheinlichkeiten berechnen:

$$\begin{aligned} P(111) &= 100\% - P(2) - P(3) \\ &= \frac{253}{253} - \frac{168}{253} - \frac{21}{253} = \frac{64}{253} = 25,30\% \end{aligned} \quad (18)$$

Es ist ebenfalls möglich dies durch die folgenden Weg herzuleiten: Der erste Gegenspieler bekommt acht Karten von den restlichen 24: $\binom{24}{8}$. Von diesen sind drei Unter. Er muss genau einen Unter von drei besitzen: $\binom{3}{1}$, sowie sieben weitere nicht-Unter Karten von den 21 übrigen: $\binom{21}{7}$. Die möglichen acht Karten für den zweiten Gegenspieler kommen aus den 16 restlichen Karten: $\binom{16}{8}$, von denen zwei Unter sind. Er muss ebenfalls genau einen Unter besitzen, nun sind allerdings nur noch zwei übrig: $\binom{2}{1}$, sowie sieben aus den

14 verbleibenden nicht-Unter Karten: $\binom{14}{7}$. Der letzte Unter kann nun nur noch beim dritten Gegenspieler liegen.

$$P(111) = \frac{\binom{3}{1} \binom{21}{7}}{\binom{24}{8}} \cdot \frac{\binom{2}{1} \binom{14}{7}}{\binom{16}{8}} = \frac{64}{253} = 25,30\% \quad (19)$$

5 Tout

Beim *Tout*, im deutschen auch *Du* genannt, erklärt der Spieler, dass er ein Solo spielt und alle Stiche machen wird. Sollte irgendein Stich an die drei Gegenspieler gehen verliert er, unabhängig von den Punkten. Es kann sich hierbei um ein Farb-Solo oder einen Wenz handeln, allerdings wird hier nur der Farb-Solo-Tout behandelt.

Normalerweise besitzt der Tout-Spieler eine größere Anzahl von laufenden Trümpfen, also vom höchsten Trumpf durchgehend absteigend. Ist der Spieler auch Ausspieler kann er mit alle diese *Laufenden* ausspielen und den Gegenspielern ihre Trümpfe ziehen. Sollte der Gegenspieler der den höchsten übrigen Trumpf besitzt zusätzlich noch genausoviel Trümpfe haben als der Spieler Laufende hat, kann er zuerst die anderen, niedrigeren Trümpfe zugeben und dann mit seinem höchsten stechen. Die folgenden Wahrscheinlichkeiten beziehen sich alleine auf diesen Fall, also das kein Gegenspieler die passenden Trümpfe hat um den Spieler alleine mit ihnen einmal zu stechen. Es ist natürlich immer noch möglich, dass das Tout mit den restlichen Farbkarten verloren wird, wenn der Spieler nicht eine hohe Straße besitzt.

Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit wird angenommen, dass der Spieler l laufende Trümpfe hat und zusätzlich w weitere Trümpfe. Sinnvolle Werte für l liegen zwischen 1 und 6. Bei $l = 0$ ist kein Tout möglich, da der Spieler immer mindestes einmal gestochen wird. Bei $l = 8$ besteht ein *Sie*, was nicht gespielt werden muss und auch nicht als Tout angesagt wird. Allerdings kann der Spieler bereits bei sieben Laufenden ($l = 7$) nicht mit Trumpf gestochen werden, da es nur noch sieben weitere Trümpfe gibt. Die Anzahl der weiteren Trümpfe w kann von 0 (keine weiteren Trümpfe) bis $8 - l$ (all restlichen Karten sind auch Trümpfe, aber halt keine Laufenden) gehen. Die Wahrscheinlichkeit hängt sowohl von l und von w ab, da der Gegenspieler der die höchste übrige Karte besitzt gleichzeitig noch l Trümpfe aus den übrigen $14 - l - w - 1$ besitzen muss. Viele Laufende erhöhen dabei die Anzahl der benötigten Gegentrümpfe und eine große Anzahl von weiteren Trümpfen reduziert die Anzahl der verbleibenden Trümpfe und somit die Wahrscheinlichkeit das dieser Gegenspieler eine größere Anzahl bekommt.

Die Wahrscheinlichkeit dass kein Gegenspieler den Tout-Spieler mit Trumpf stechen kann ergibt sich wie folgt: Aus den 14 vorhandenen Trümpfen sind bereits $l + w$ beim Spieler. Derjenige Gegenspieler mit dem höchsten Trumpf darf keine weiteren l Trümpfe von den $14 - l - w - 1$ anderen Trümpfen besitzen: $\binom{13-l-w}{k}$ mit $k < l$, wobei die Anzahl seiner weiteren Trümpfe mit k bezeichnet wird. Desweiteren bekommt er noch $7 - k$ Farbkarten. Von den ursprünglichen $32 - 14 = 18$ Farbkarten sind bereits $8 - l - w$ beim Spieler, es bleiben also noch $18 - (8 - l - w) = 10 + l + w$ zur Auswahl: $\binom{10+l+w}{7-k}$. Beide

zusammen ergeben die Anzahl der günstigen Möglichkeiten, dass dieser Gegenspieler *genau* k zusätzliche Trümpfe bekommt. Da alle k von 0 bis $l - 1$ günstig sind müssen alle diese Möglichkeiten addiert werden. Insgesamt bekommt dieser Gegenspieler 7 weitere Karten von 23: $\binom{23}{7}$. Die Wahrscheinlichkeit ist also:

$$P_{\text{Tout}}(l, w) = \frac{\sum_{k=0}^{l-1} \binom{13-l-w}{k} \binom{10+l+w}{7-k}}{\binom{23}{7}} \quad (20)$$

Die Ergebnisse für alle sinnvollen Werte von l und w sind in der folgenden Tabelle dargestellt:

Tabelle 5: Wahrscheinlichkeit das kein Gegenspieler beim Tout mit Trumpf stechen kann.

	%	Anzahl weiterer Trümpfe w des Spieler							
		0	1	2	3	4	5	6	7
Anzahl Laufender l	1	0,13	0,32	0,70	1,40	2,63	4,67	7,93	12,98
	2	4,47	7,70	12,42	18,96	27,53	38,22	50,84	
	3	31,32	41,82	53,26	64,95	76,08	85,79		
	4	76,12	84,44	90,93	95,50	98,27			
	5	97,43	98,93	99,66	99,94				
	6	99,95	99,99	100					
	7	100	100						

6 Stechen mit Farben

Für einen Solo-Spieler, besonders bei einem Wenz und Tout, kann es wichtig sein mehrere Stiche mit laufenden Farbkarten zu machen, nachdem alle Trümpfe des Gegner gefallen sind. Im folgenden wird ermittelt welche Chancen es gibt von einem Gegenspieler mit Farbkarten gestochen zu werden falls man selber die Sau und weitere Karten der selben Farbe besitzt. Der Spieler soll hier Ausspieler sein und die Gegner bereits Trumpf-frei. Diese Wahrscheinlichkeiten sind vor der Spielansage interessant, um zu wissen wie wahrscheinlich es ist einen Wenz oder Tout etc. zu verlieren.

6.1 Sau und 10er

Hat der Spieler die Sau und den 10er kann er nacheinander beide spielen und mit Farbe gestochen zu werden. Hat er keine weiteren Karten dieser Farbe ist die Verteilung der restlichen Karten dieser Farbe nicht mehr von Belang. Sollte er allerdings noch eine weitere Karte besitzen, die nicht der König ist, könnte er mit diesem gestochen werden, falls der Gegenspieler mit dem König auch die zwei letzten Karten dieser Farbe besitzt: $\binom{2}{2}$. Neben diesen besitzt dieser Gegenspieler noch 5 weitere Karten ($8 - \text{König} - 2$)

aus den 21 verbleibenden (8 Karten sind bereits beim Spieler plus die 3 vorhandenen: $32 - 8 - 3 = 21$). Insgesamt bekommt er 7 weitere aus 23 Karten.

$$P_{\text{Sau},10\text{er}+1} = 1 - \frac{\binom{2}{2}\binom{21}{5}}{\binom{23}{7}} = \frac{232}{253} = 91,70\% \quad (21)$$

Der Spieler sticht also mit allen drei Karten in etwa 11 von 12 Fällen.

6.2 Sau und König

Hat der Spieler die Sau und den König kann er darauf hoffen, dass der 10er alleine steht und er trotzdem zweimal stechen kann. Hierfür muss der Gegenspieler der den 10er besitzt keinen weiteren der drei übrigen Karten besitzen: $\binom{3}{0} = 1$, sondern alle seine 7 restlichen Karten aus den $32 - 8 - 4 = 20$ übrigen Karten beziehen: $\binom{20}{7}$, anstatt aus den $32 - 8 - 1 = 23$ vorhandenen Karten: $\binom{23}{7}$. Diese Anzahlen ergeben sich wie folgt: Von der 32 Karten sind bereits 8 beim Spieler, davon 2 von der gewählten Farbe. Der 10er dieser Farbe wird ebenfalls nicht mehr mitgerechnet. Bleiben also $32 - 8 - 1 = 23$ Karten zur Auswahl, von denen noch 3 in der gewählten Farbe sind: $23 - 3 = 20$.

$$P_{\text{Sau},\text{König}} = \frac{\binom{3}{0}\binom{20}{7}}{\binom{23}{7}} = \frac{80}{253} = 31,62\% \quad (22)$$

Der Spieler kann also davon ausgehen in nur knapp einem Drittel aller Fälle auch mit dem König stechen zu können.

6.3 Sau und König plus Eins

Besitzt der Spieler zusätzlich noch eine weitere Karte der Farbe die nicht der 10er ist, muss der Gegenspieler mit dem 10er nun alle seine 7 Karten aus den 21 anderen der insgesamt 23 Karten bekommen haben.

$$P_{\text{Sau},\text{König}+1} = \frac{\binom{2}{0}\binom{21}{7}}{\binom{23}{7}} = \frac{120}{253} = 47,43\% \quad (23)$$

Die zusätzliche Karte erhöht die Wahrscheinlichkeit mit dem König stechen zu können auf knapp 50%. In diesem Fall kann der Spieler auch immer mit der dritten Karte stechen, da die restlichen zwei Karten der Farbe bereits zur Sau und König hinzu gegeben werden mussten.

6.4 Sau und König plus Zwei

Besitzt der Spieler zusätzlich zur Sau und König noch zwei weitere Karten der Farbe wovon keine der 10er ist, muss der Gegenspieler mit dem 10er nun alle seine 7 Karten aus den 22 anderen der insgesamt 23 Karten bekommen haben.

$$P_{\text{Sau, König}+1} = \frac{\binom{1}{0} \binom{22}{7}}{\binom{23}{7}} = \frac{16}{23} = 69,57\% \quad (24)$$

Hier kann der König also in etwas mehr als zwei von drei Fällen stechen. Dies ist leicht nachvollziehbar: Es gibt in diesem Fall neben dem 10er nur noch eine weitere Karte der Farbe, die sich auf drei Spieler verteilt. Bei einer Gleichverteilung gäbe es also eine Chance von 2:3 (66,66%), dass die weitere Karte nicht auf den Gegenspieler mit dem 10er fällt. Da dieser allerdings nur noch 7 weitere Karten zugewiesen bekommt, die anderen beiden aber noch 8 ist dies nochmal ein klein wenig wahrscheinlicher.

6.5 Sau und 9er

Hat der Spieler nur den Sau und den 9er ist noch unwahrscheinlicher, dass er mit beiden stechen kann. Hierfür müssen der 10er und der König bei zwei verschiedenen Gegenspielern liegen die beide zusätzlich auch keinen einzigen Karte dieser Farbe besitzen dürfen. Die Wahrscheinlichkeit wird folgendermaßen hergeleitet: Derjenige Gegenspieler der den 10er besitzt muss keine weitere Karte der Farbe besitzen, weder den König noch eine andere: $\binom{3}{0} = 1$, sondern alle seine 7 restlichen Karten aus den $32 - 8 - 4 = 20$ passenden Karten von den insgesamt $32 - 8 - 1 = 23$ noch vorhandenen beziehen: $\binom{20}{7}$ aus den $\binom{23}{7}$. *Zusätzlich* muss derjenige andere Gegenspieler der den König hat ebenfalls keine von den zwei weiteren Karte der Farbe besitzen: $\binom{2}{0}$, sondern alle seine 7 restlichen Karten aus den nun $20 - 7 = 13$ Karten aus den nun insgesamt $23 - 8 = 15$ Karten beziehen: $\binom{13}{7}$ aus $\binom{15}{7}$. Beide Wahrscheinlichkeiten müssen hierbei multipliziert werden.

$$\begin{aligned} P_{\text{Sau, 9er}} &= \frac{\binom{3}{0} \binom{20}{7}}{\binom{23}{7}} \cdot \frac{\binom{2}{0} \binom{13}{7}}{\binom{15}{7}} \\ &= \frac{80}{253} \cdot \frac{4}{15} = \frac{64}{759} = 8,43\% \end{aligned} \quad (25)$$

Der Spieler kann also davon ausgehen nur einmal in circa 12 Versuchen mit den 9er stechen zu können.

6.6 Sau und 9er plus Eins

Hat der Spieler entweder noch den 8er oder 7er verschiebt sich die Anzahl der Karten wie folgt: Da eine Karte der Farbe weniger in den übrigen Karten vorhanden ist, gibt es

nun 21 und nicht mehr nur 20 Karten aus denen der Gegenspieler mit dem 10er seine restlichen 7 Karten bekommen darf. Ebenfalls gibt es nicht mehr nur 13 sondern nun 14 erlaubte Karten für den zweiten Gegenspieler mit dem König. Die Anzahl der insgesamt noch vorhandenen Karten, 23 und 15, bleiben allerdings gleich.

$$\begin{aligned}
 P_{\text{Sau, 9er+1}} &= \frac{\binom{2}{0} \binom{21}{7}}{\binom{23}{7}} \cdot \frac{\binom{1}{0} \binom{14}{7}}{\binom{15}{7}} \\
 &= \frac{120}{253} \cdot \frac{8}{15} = \frac{64}{253} = 25,30\%
 \end{aligned} \tag{26}$$

Dies ist eine genau dreimal so hohe Wahrscheinlichkeit wie ohne die zusätzliche Karte. Der Spieler kann also davon ausgehen nur einmal in circa vier Versuchen das dem 9er durchzukommen. Da hierfür der 10er und der König jeweils alleine stehen müssen, liegt die letzte Karte beim dritten Gegenspieler der diese zur Sau hinzugeben muss. Deshalb sticht die zusätzliche Karte in diesem Fall ebenfalls immer und kann auch vor dem 9er gespielt.

6.7 Sau und 9er, 8er, 7er

Hat der Spieler zur Sau noch alle drei unteren Farbkarten bleiben nur noch der 10er und der König übrig, die beide nicht aufeinander fallen dürfen. Derjenige Gegenspieler der den 10er besitzt muss also wiederum alle 7 restlichen Karten aus den $32 - 8 - 2 = 22$ von den insgesamt noch $32 - 8 - 1 = 21$ vorhandenen Karten bekommen.

$$P_{\text{Sau, 9er, 8er, 7er}} = \frac{\binom{1}{0} \binom{22}{7}}{\binom{23}{7}} = \frac{16}{23} = 69,57\% \tag{27}$$

Dies die dasselbe Wahrscheinlichkeit wie für *Sau und König plus Zwei*, da in beiden Fällen die beiden übrigen Farbkarten nicht zusammenfallen dürfen.

7 Gegenspieler ist nicht Farbfrei

Spielt man eine Farb-Sau muss man darauf hoffen, dass kein Gegenspieler auf dieser Farbe frei ist und noch einen Trumpf besitzt. Für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit wird hier angenommen, dass keine Karte der Farbe bereits ausgespielt wurde, also alle 6 Karten noch im Spiel sind. Der Ausspieler besitzt die Sau sowie noch n weitere Karten der Farbe.

Beim einem Rufspiel müssen beide Gegenspieler mindestens ein Karte der Farbe besitzen, ansonsten könnten sie mit einem Trumpf stechen. Der erste Gegenspieler muss hierfür mindestens eine Karte aus den $6 - 1 - n = 5 - n$ übrigen besitzen: $\binom{5-n}{a}$ mit $a \geq 1$. Zusätzlich besitzt er noch $8 - a$ weitere Karten aus den $32 - 8 - (5 - n) = 19 + n$


verbleibenden Karten (Von den 32 Karten sind bereits 8 beim Ausspieler, minus der $5 - n$ restlichen Karten der Farbe): $\binom{19+n}{8-a}$. Insgesamt bekommt er 8 aus 24 Karten: $\binom{24}{8}$. Der zweite Gegenspieler muss ebenfalls mindestens eine Karte der Farbe besitzen, von denen nun nur noch $5 - n - a$ übrig sind: $\binom{5-n-a}{b}$ mit $b \geq 1$. Seine anderen $8 - b$ Karten stammen aus den $19 + n - (8 - a) = 11 + n + a$ noch verfügbaren Karten: $\binom{11+n+a}{8-b}$. Insgesamt bekommt er 8 aus 16 Karten: $\binom{16}{8}$. Die Wahrscheinlichkeit berechnet sich nun aus der Summe der Wahrscheinlichkeiten für alle günstigen Kartenanzahlen a und b . Es gilt $a + b \leq n + 1$. Hier a muss zwischen 1 und $5 - n - 1$ liegen, da noch mindestens eine Karte der Farbe für den zweiten Gegenspieler übrig bleiben muss, weil b zwischen 1 und $5 - n - a$ liegt.

$$P_{2\text{GNFF}}(n) = \sum_{a=1}^{4-n} \sum_{b=1}^{5-n-a} \left[\frac{\binom{5-n}{a} \binom{19+n}{8-a}}{\binom{24}{8}} \cdot \frac{\binom{5-n-a}{b} \binom{11+n+a}{8-b}}{\binom{16}{8}} \right] \quad (28)$$

In dieser Formel können die beiden Nenner noch ausgeklammert werden:

$$P_{2\text{GNFF}} = \frac{\sum_{a=1}^{4-n} \sum_{b=1}^{5-n-a} \binom{5-n}{a} \binom{19+n}{8-a} \binom{5-n-a}{b} \binom{11+n+a}{8-b}}{\binom{24}{8} \binom{16}{8}} \quad (29)$$

Tabelle 6: Wahrscheinlichkeit das kein Gegenspieler farbfrei ist, wenn man zur Sau noch n weitere Karten der Farbe besitzt.

n	0	1	2	3	4
$P_{2\text{GFF}}(n)$ in %	79,58	66,40	47,43	23,19	0
Graph					
$P_{3\text{GFF}}(n)$ in %	69,57	50,59	25,30	0	0
Graph	